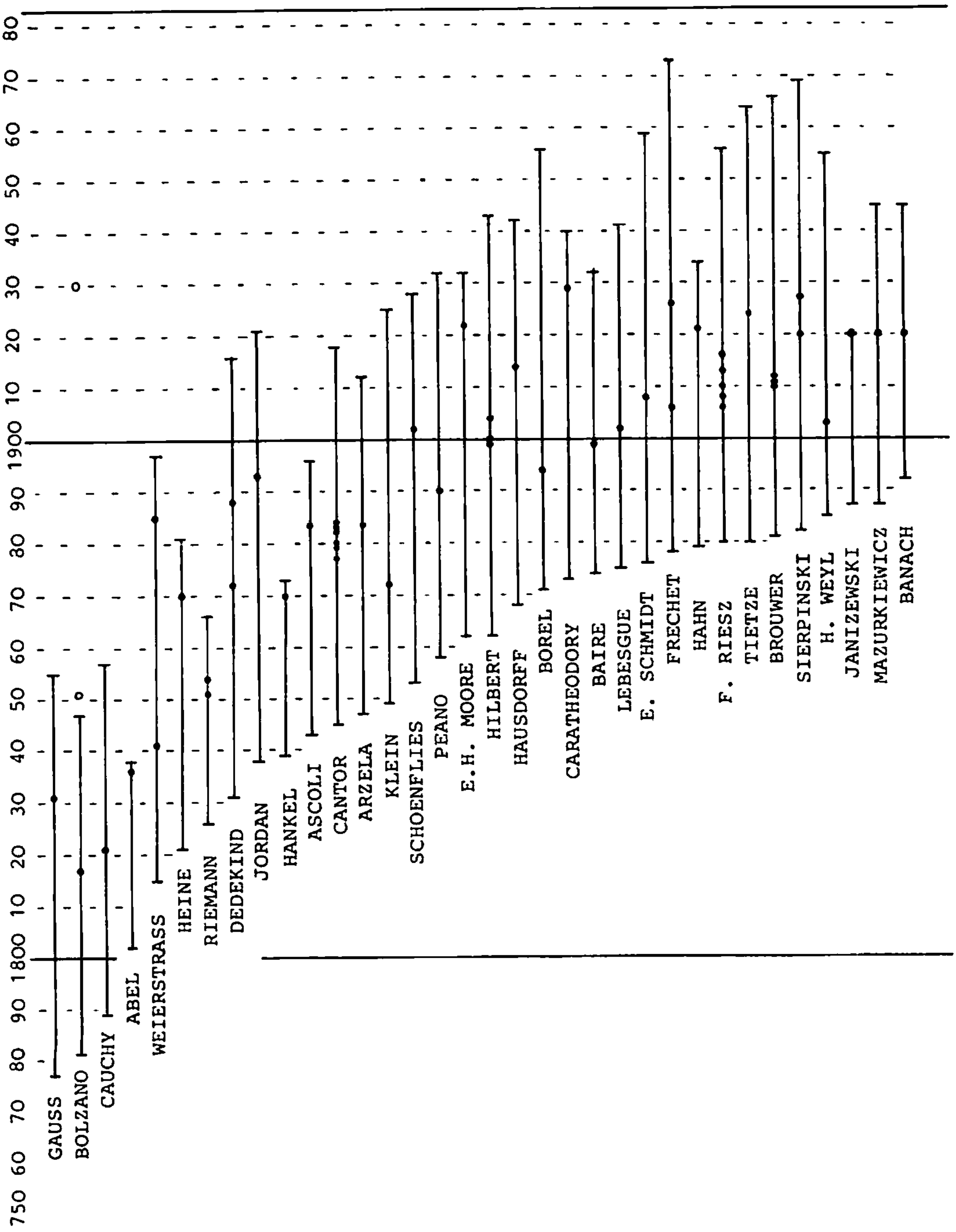
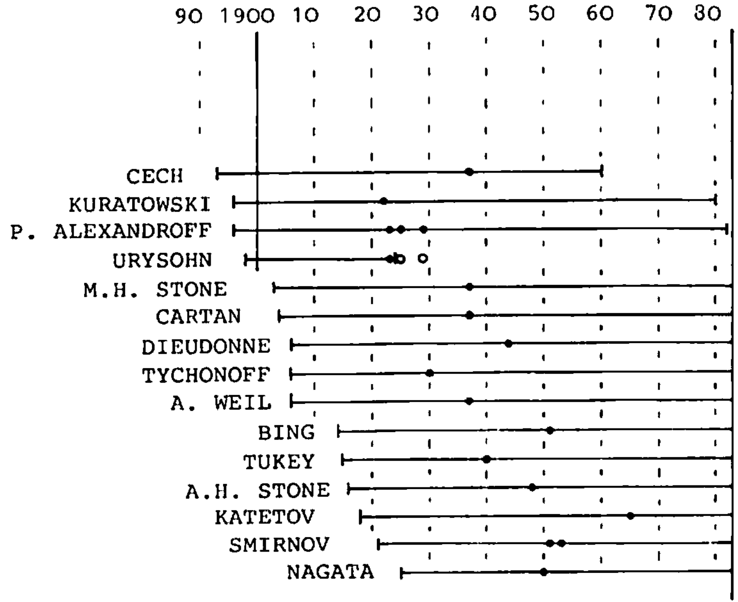
ZEITTAFEL


1750
60
70
80
90
1800
10
20
30
40
50
60
70
80
90
1900
10
20
30
40
50
60
70
80
GAUSS
BOLZANO
CAUCHY
ABEL
WEIERSTRASS
HEINE
RIEMANN
DEDEKIND
JORDAN
HANKEL
ASCOLI
CANTOR
ARZELA
KLEIN
SCHOENFLIES
PEANO
E.H. MOORE
HILBERT
HAUSDORFF
BOREL
CARATHEODORY
BAIRE
LEBESGUE
E. SCHMIDT
FRECHET
HAHN
F. RIESZ
TIETZE
BROUWER
SIERPINSKI
H. WEYL
JANIZEWSKI
MAZURKIEWICZ
BANACH



Die Punkte —•— o beziehen sich auf in den Historischen Anmerkungen erwähnte (Publikations-)Daten.

HISTORISCHE ANMERKUNGEN

Die mengentheoretische Topologie als selbständiger Zweig der Mathematik entstand vor ca. 70 Jahren.

Topologische Ideen jedoch gehen bis in die Antike zurück. Grenzwert-Betrachtungen waren bereits den Griechen vertraut. Seit Erfindung des Infinitesimalkalküls durch Newton (1643 - 1727) und Leibniz (1646 - 1716) spielen sie eine fundemantale Rolle in der Mathematik. Bereits Leibniz schwebte eine "Analysis situs" als selbständiger Wissenschaftszweig vor, ohne daß dieser zur damaligen Zeit bereits entwickelt werden konnte.

Die notwendigen Grundlagen der mengentheoretischen Topologie wurden im 19. Jahrhundert gelegt:

(1) Geometrische Betrachtungsweisen begannen, analytische Zusammenhänge zu erhellen. Gauss entmystifizierte 1831 die komplexen Zahlen durch ihre Darstellung als Punkte einer Ebene (der Gaussschen Zahlenebene). Riemann, wie Gauss einer der genialsten Mathematiker aller Zeiten, dessen Ideen in zahlreichen Zweigen der Mathematik und Physik wegweisend wirkten, stellte 1851 in seiner Dissertation "Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe" holomorphe Funktionen nicht mehr als gewisse analytische Ausdrücke sondern als Abbildungen zwischen geeigneten Flächen (den Riemannschen Flächen) dar, und entwickelte 1854 in seinem berühmten Habilitationsvortrag "Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" die Idee einer Analysis situs als Lehre von den mehrfach ausgedehnten stetigen Größen. Kleins "Erlanger Programm" von 1872 gab geometrischen Ideen weiteren Aufschwung. Hilberts berühmte Untersuchungen über Integralgleichungen führten ihn 19o4 zur Definition des unendlich-dimensionalen Hilbert-Raumes l_2, dessen Punkte gewisse Folgen sind, und dessen Eigenschaften Hilberts Schüler E. Schmidt 19o8 in rein geometrischer Sprache darstellte.

(2) Die wissenschaftliche Strenge des Altertums, die den Mathematikern des 18. und beginnenden 19. Jahrhunderts bei der stürmischen Entwicklung und Anwendung des Infinitesimalkalküls teilweise abhan-

den gekommen war*, wurde wiederentdeckt. Vage intuitive Vorstellungen wurden durch präzise Begriffsbildungen und Hinweise auf die Anschauung durch lückenlose Beweisketten ersetzt. Das war besonders notwendig "in einem Gebiet, wo schlechthin nichts selbstverständlich und das Richtige häufig paradox, das Plausible falsch ist" und wo man "scheinbaren Evidenzen nur nach vorsichtiger Prüfung trauen darf" (Hausdorff 1914). Die Begriffe Konvergenz und Stetigkeit erhielten durch Bolzano in Prag, Cauchy in Paris und Weierstraß in Berlin präzise Bedeutungen. Bolzano, kein eigentlicher Fachmathematiker sondern in erster Linie Theologe und Philosoph, der wegen seiner aufklärerischen Ideen am 24. Dezember 1819 auf Dringen der Curie seine Position als Theologe an der Prager Universität verlor und nur knapp dem Kerker entging, veröffentlichte 1817 eine bedeutende Schrift "Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege". Sie blieb leider lange fast unbekannt. Seine "Funktionenlehre", die Resultate von Cauchy und Weierstraß vorwegnahm, wurde gar erst 193o veröffentlicht, mehr als 8o Jahre nach seinem Tod. Ganz im Gegensatz zu Bolzano war Cauchy nicht nur einer der produktivsten, sondern auch einer der anerkanntesten und einflußreichsten Mathematiker der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts. Ganz im Gegensatz zu Bolzano erzkonservativ, mußte er als treuer Anhänger König Karls X - nicht bereit, einen Eid auf dessen Nachfolger zu leisten - Frankreich zwischen 183o und 1838 verlassen.

Weierstraß war 1842 bis 1855 Lehrer und erzielte während dieser Zeit bahnbrechende Resultate, die ihm 1864, fast 5o-jährig, zu einer ordentlichen Professur in Berlin verhalfen. Wegen seiner außerordentlichen wissenschaftlichen Leistungen und seiner blendenden Vorlesungen wurde er im reifen Alter berühmt und vielfach geehrt. Die heutige "Epsilontik" geht auf ihn zurück und die "Weierstraßsche Strenge" wurde durch Felix Klein zu einem geflügelten Wort. 1841 entdeckte Weierstraß das Konzept der gleichmäßigen Konvergenz; 1885 bewies er, daß jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gleichmäßig durch Polynome approximierbar ist (ein Ergebnis, das 1937 durch

---

*z.B. fand Euler an der Formel $\sum_{-\infty}^{\infty} x^n = \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{x^n} + \sum_{1}^{\infty} x^n = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{1-x} = 0$ anscheinend nichts Beunruhigendes, obwohl die Reihe für kein x konvergiert.

M.H. Stone einen erheblich weiteren Rahmen erhalten sollte), womit Riemanns Idee von Funktionenräumen durch ein erstes wesentliches Resultat konkreter zu werden begann. Weierstraß entwickelte auch bereits die lokalisierte Form der gleichmäßigen Konvergenz unter dem Namen "gleichmäßige Konvergenz in jedem Punkt", deren große Bedeutung unter dem Namen "stetige Konvergenz" 1921 von Hahn in der reellen Analysis und 1929 von Carathéodory in der komplexen Analysis demonstriert werden sollte. Heine entdeckte 187o das Konzept der gleichmäßigen Stetigkeit und zeigte, daß jede stetige Abbildung $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ bereits gleichmäßig stetig ist. Der Begriff der reellen Funktion erhielt 187o durch Hankel in seinem Vortrag "Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen" seine heutige präzise und allgemeine Form. Das System der reellen Zahlen erhielt 1872 durch Dedekinds Schrift "Stetigkeit und Irrationale Zahlen" eine solide Grundlage.

(3) Die axiomatische Methode, die uns schon in Euklids Elementen begegnet und die im Laufe der Jahrhunderte stark in den Hintergrund getreten war, wurde wiederbelebt - insbesondere durch das erfolgreiche, 1899 erstmals erschienene Werk "Grundlagen der Geometrie" von Hilbert, einem der einflußreichsten Mathematiker aller Zeiten, dessen 19oo auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß in Paris vorgestellten 23 Probleme die Mathematiker so faszinierten, daß sich seit nunmehr fast 1oo Jahren führende Mathematiker um deren Lösung bemühen, der in den Jahren 1895 bis 193o den kleinen Ort Göttingen zu einem Mekka für Mathematiker und Physiker machte und der 69-facher Doktor-Vater wurde. Ohne die axiomatische Methode wären die Entstehung und die explosionsartige Entfaltung neuer mathematischer Wissenschaftszweige wie Topologie, Maßtheorie, Funktionalanalysis und Algebra in der ersten Hälfte des 2o. Jahrhunderts unvorstellbar.

(4) Die bedeutendste Grundlage für die Topologie - und nicht nur für sie, sondern für große Teile der Mathematik des 2o. Jahrhunderts - wurde von Cantor in den Jahren 1879 bis 1884 mit der Erschaffung der Mengenlehre gelegt. Erste Ansätze der Cantorschen Ideen sind bereits in Bolzanos 1851 (posthum) erschienenen "Paradoxien des Unendlichen" erkennbar, doch blieb es dem Genie Cantor vorbehalten, die Mengenlehre als mathematische Disziplin zu entwickeln. Es ist heute nur noch schwer vorstellbar, daß Cantors epochemachende Leistungen damals nicht allgemein anerkennt wurden.

Während Hilbert später von dem von Cantor geschaffenen Paradies sprach, aus dem die Mathematiker sich nicht wieder würden vertreiben lassen, wurden Cantors Begriffsbildungen von anderen z.T. erbittert bekämpft, wobei sich besonders unrühmlich der hervorragende Algebraiker Kronecker hervortat, der (glücklicherweise nur mit verzögerndem Erfolg) die Veröffentlichung Cantorscher Ergebnisse zu verhindern suchte und (leider erfolgreich) eine Berufung Cantors nach Berlin verhinderte. Es ist nicht auszuschließen, daß die Ablehnung seiner Ideen wesentlich dazu beitrug, daß Cantor 1884 geistig schwer erkrankte, später wiederholt Nervenzusammenbrüche erlitt und schließlich in einer Nervenklinik starb. Cantors Bedeutung für die Topologie liegt aber nicht allein in der Erschaffung der Mengenlehre, sondern auch darin, daß er wesentliche Einsichten in die topologische Struktur zunächst der reellen Zahlengeraden und später der endlich-dimensionalen Euklidischen Räume gewann. Nach Bourbaki ist es "bewundernswert zu sehen, mit welcher Sauberkeit sich unter seinen Händen nach und nach diese Begriffe entwirren, die so unentwirrbar in dem klassischen Begriff des 'Kontinuums' verwickelt schienen". Insbesondere definierte und analysierte er für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ als erster die Begriffe Häufungspunkt, offene, abgeschlossene, in sich dichte und total-unzusammenhängende Menge. Zusammenhängende Mengen wurden zwar erst später von Jordan (1893) und Schoenflies (19o2) eingeführt, doch hatte Cantor bereits 1883 den uniformen Zusammenhang in Form des Ketten-Zusammenhangs definiert. Von Cantor stammen ferner die Konstruktion und die Untersuchung der denkwürdigen Eigenschaften des nach ihm benannten Cantorschen Diskontinuums sowie die Entdeckung der Cantorschen Durchschnittseigenschaft: jede monoton fallende Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen eines beschränkten reellen Intervalls hat einen nicht-leeren Schnitt. Erstaunen, nicht nur bei den Zeitgenossen sondern auch bei ihm selbst, rief Cantors Entdeckung (1877) hervor, daß für je zwei natürliche Zahlen n und m eine Bijektion zwischen dem n-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ und dem m-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^m$ existiert. Dieses Paradoxon schien das Dimensions-Konzept zu erschüttern, zumal Peano 189o zeigen konnte, daß eine stetige Surjektion $f: [0,1] \to [0,1]^2$ existiert. Jedoch vermutete bereits Dedekind, der neben Galois als Begründer der modernen Algebra gilt, in einem Brief an Cantor, daß für $n \neq m$ keine in beiden Richtungen stetige Bijektion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existieren könne, eine Vermutung, die erst 1911 durch Brouwer bewiesen werden sollte. Schließlich gelangen Cantor, Weierstraß und Dedekind mit Hilfe der von Cantor geschaffenen Begriffe axiomatische und konstruktive Beschreibungen reeller Zahlen. Das 1888 veröffentlichte Werk "Was sind und was sollen die Zahlen" von Dedekind gilt auch heute noch als Grundlage zum Aufbau der Analysis.

Um die Jahrhundertwende gab es, teils angeregt durch Cantors Untersuchungen, teils motiviert durch spezielle analytische Fragen, zahlreiche weitere Untersuchungen über die topologische Struktur von Mengen in endlich-dimensionalen Euklidischen Räumen und von Mengen reellwertiger Funktionen. Nachdem Bolzano und Weierstraß bereits gezeigt hatten, daß jede beschränkte Folge reeller Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt, charakterisierten Arzelà und Ascoli 1883/84 Mengen F stetiger Funktionen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, daß jede Folge (f_n) in F eine gleichmäßig konvergente Teilfolge besitzt. (Analoge Ergebnisse für komplexwertige holomorphe Funktionen wurden später durch Vitali, Carathéodory und Montel erzielt). Borel bewies 1894 in seiner Dissertation, daß jede Überdeckung eines abgeschlossenen Intervalls reeller Zahlen durch eine Folge offener Intervalle bereits eine endliche Überdeckung besitzt. Eine präzise Fassung des wichtigen topologischen Begriffs der Kompaktheit, schien greifbar nahe, gelang jedoch erst ca. 3o Jahre später den Russen Alexandroff und Urysohn (siehe unten). Borel wurde durch maßtheoretische Fragen zu seinem Ergebnis geführt. Er benötigte den Satz nämlich, um zeigen zu können, daß für jede Überdeckung des abgeschlossenen Intervalls I durch eine Folge offener Intervalle I_n die Länge $|I|$ von I höchstens gleich der Summe $\Sigma|I_n|$ der Längen $|I_n|$ der Intervalle I_n ist. Erst diese Tatsache macht eine sinnvolle Maßtheorie möglich. Borels Ideen wurden von Lebegue in seiner Dissertation (19o2) weiterentwickelt und die im Entstehen begriffenen Wissenschaftszweige Maßtheorie und Topologie begannen sich in mannigfacher Weise wechselseitig zu befruchten. Hatte Cauchy 1821 noch irrtümlich behauptet, daß der einfache Limes einer Folge stetiger Funktionen wieder stetig sei, was von Abel 1826 widerlegt wurde, so startete Baire 1899 in seiner Dissertation "Sur les fonctions de variables réelles" tiefgründige Untersuchungen über reelle Funktionen, welche sich sukzessive aus stetigen Funktionen mittels einfacher Limesbildungen gewinnen lassen. Im Rahmen dieser Untersuchungen führte er Mengen von 1. und 2. Kategorie ein und zeigte zunächst, daß $\mathbb{R}$, später daß $\mathbb{R}^n$ von 2. Kategorie ist. Die Baireschen Ergebnisse wurden Ausgangspunkt für zahlreiche Erkenntnisse nicht nur in der Topologie (besonders durch die Polnische Schule, siehe unten) sondern auch in der Funktionalanalysis, die sich in enger Verzahnung mit der Topologie zu entwickeln begann. Zu den faszinierendsten Ergebnissen der im Entstehen begriffenen Topologie gehören die in den Jahren 191o bis 1912 erschienenen Resultate Brouwers, dem es gelang, eine Reihe fundamentaler, scheinbar evidenter Eigenschaften der endlich-dimensionalen Euklidischen Räume mittels äußerst tiefsinniger Überlegungen zu beweisen, insbesondere den nach ihm benannten Fixpunktsatz, die Sätze von der Invarianz der Dimension und des Gebiets und die Verallgemeinerung des 1893 von Jordan bewiesenen Kurvensatzes auf den $\mathbb{R}^n$. Es ist besonders bemerkenswert, daß diese Ergebnisse von einem Wissenschaftler erzielt wurden, der an völlig anderen Fragen interessiert war, nämlich an einer soliden Grundlegung der Mathematik. Brouwer lehnte nicht-konstruktive Beweisverfahren z.B. mittels des sog. Auswahlaxioms oder mittels indirekter Beweise vermöge des "Satzes vom ausgeschlossenen Dritten" als logisch unbegründete, auf unzulässigen Verallgemeinerungen basierende, Denkgewohnheiten strikt ab. Um bei den Mathematiker-Kollegen für seine revolutionären Ideen Gehör zu finden, sah er sich gezwungen, ihnen zunächst zu beweisen, daß er ein fähiger Mathematiker ist. So bewies dieser geniale Holländer innerhalb weniger Jahre die fundamentalsten Ergebnisse über die Topologie endlich-dimensionaler Euklidischer Räume - unter Zuhilfenahme von Begriffen und Methoden, die er selbst für unzulässig erachtete. Brouwers Untersuchungen wirkten auf viele jüngere Mathematiker stimulierend. So schrieb H. Weyl in seinem 1913 erschienenen vielbewunderten Werk "Die Idee der Riemannschen Fläche", dessen Ziel eine streng begründete Entwicklung der Grundideen der Riemannschen Funktionentheorie war, "... bin ich dabei durch die in den letzten Jahren erschienenen grundlegenden topologischen Untersuchungen Brouwers, deren gedankliche Schärfe und Konzentration man bewundern muß, gefördert worden".

Zu Beginn des 2o. Jahrhunderts gab es erste Versuche, zur Vereinheitlichung der Untersuchung topologischer Phänomene einen abstrakten Raumbegriff axiomatisch zu fassen. Die Versuche von Fréchet in seiner Dissertation "Sur quelques points du calcul fonctionel" (19o6), Räume durch Axiomatisierung des Begriffs der Konvergenz von Folgen, und von F. Riesz in seinen Arbeiten "Die Genesis des Raumbegriffs" (19o6) und "Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre" (19o8), Räume durch Axiomatisierung des Begriffs Häufungspunkt bzw. durch

Axiomatisierung des Begriffs der benachbarten Mengen zu definieren, erwiesen sich jedoch als unbefriedigend, da die jeweiligen Axiome ungeeignet gewählt waren. Jedoch gelang Fréchet in seiner Dissertation ein großer Wurf: er definierte metrische Räume in ihrer heutigen Form (der Name "metrischer Raum" stammt von Hausdorff 1914) und schuf damit einen Raumbegriff, der

(a) einen geeigneten Rahmen für die Untersuchung der topologischen Eigenschaften endlich-dimensionaler Euklidischer Räume und des Hilbert-Raumes l_2 schuf,

(b) eine Grundlage bildete, auf der F. Riesz, bis 1912 Lehrer an einer Kleinstadtschule, 191o die Theorie der L_p-Räume, 1913 die der l_p-Räume und 1916 die der mit der Supremum-Norm versehenen Räume $C([a,b])$ stetiger Abbildungen $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ entwickeln konnte,

(c) eine Grundlage für die Theorie der Banach-Räume und somit der Funktionalanalysis legte, die insbesondere durch die Arbeiten Banachs, des brilliantesten polnischen Mathematikers (von Steinhaus während eines Parkspaziergangs "entdeckt", Kaffeehaus-Mathematiker, während der deutschen Besetzung Polens gezwungen, als Läuse-Ernährer in einem Institut zur Gewinnung von Anti-Typhus-Impfstoff zu fungieren, durch Lungenkrebs bei Kriegsende dahingerafft) seit 192o zu einem eigenständigen Zweig der Mathematik entwickelt wurde,

(d) eine Grundlage der von Fréchet selbst 1926 entworfenen Theorie der heute nach ihm benannten Fréchet-Räume (= vollständig metrisierbare topologische Vektorräume) bildete.

Fréchets Dissertation, in der für metrische Räume bereits die Begriffe vollständig, separabel und kompakt definiert werden, hatte - wie obige Bemerkungen erkennen lassen - einen enormen Einfluß nicht nur auf die Entwicklung der Topologie sondern auch auf die der Funktionalanalysis. Der entscheidende Wurf jedoch gelang Hausdorff. In seinem 1914 erschienenen, Cantor gewidmeten Buch "Grundzüge der Mengenlehre" definierte er topologische Räume durch Axiomatisierung des Umgebungsbegriffs (Präziser: von offenen Umgebungsbasen) in einer Form, die nur um weniges enger ist als die heute gebräuchliche (die von ihm definierten Räume heißen heute Hausdorff-Räume). In seinem Buch entwickelte er mit großer Klarheit sowohl die Theorie topologischer Räume als auch die Theorie metrischer Räume. Es ist wohl einzigartig in der Geschichte der Mathematik, daß ein neues mathematisches Gebiet schlagartig durch das Erscheinen eines einzigen Buches entstand. Hausdorffs Theorie, nach Bourbaki "ein Vorbild für eine axiomatische Theorie, die abstrakt, doch von vornherein auf Anwendungen eingestellt ist", war der Ausgangspunkt für zahlreiche Untersuchungen auf dem Gebiet der Topologie (sowie auch der Maßtheorie), insbesondere der weiter unten erwähnten Moskauer Schule und der Polnischen Schule. Die mengentheoretische Topologie als gesonderter Wissenschaftszweig war entstanden und gelangte schnell zu voller Blüte. Auf Hausdorff selbst gehen eine Fülle von Ergebnissen zurück. Besonders erwähnt sei sein Satz über die Möglichkeit der Fortsetzung topologisch äquivalenter Metriken von abgeschlossenen Teilräumen und seine Konstruktion der Vervollständigung metrischer Räume, die dem Cantorschen Verfahren der Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ nachgebildet ist. Hausdorff war ein vielseitiger Mann. Neben fundamentalen Arbeiten in Mengentheorie, Topologie, Maßtheorie und anderen mathematischen Disziplinen veröffentlichte er Arbeiten in Astronomie und Optik sowie unter dem Künstlernamen Paul Mongré zwei Bücher mit Gedichten und Aphorismen, philosophischen und literarischen Essays, ein philosophisches Buch und eine mit beachtlichem Erfolg aufgeführte Posse "Der Arzt seiner Ehre". Hausdorffs Ende erfüllt mit Schmerz und Bitterkeit. Als er sich unter dem Nationalsozialismus als Jude der Internierung in einem Konzentrationslager nicht mehr entziehen konnte, schied er gemeinsam mit seiner Frau und deren Schwester aus dem Leben.

Hausdorffs Buch inspirierte zahlreiche junge Mathematiker, sich dem neu geschaffenen Zweig der Mathematik zu widmen. In Moskau waren insbesondere Alexandroff und Urysohn von Hausdorffs Werk fasziniert. Alexandroff hatte nach anfänglichen Erfolgen zwischenzeitlich das Vertrauen in seine mathematische Begabung verloren, da es ihm nicht gelang, - was uns im Nachhinein nicht verwundern kann -, Cantors Kontinuumhypothese zu beweisen oder zu widerlegen. Er verließ Moskau vorübergehend, wurde Theaterproduzent, hielt Vorträge über Theater und Literatur, kehrte aber nach einigen Jahren nach Moskau zurück, wo er, von Urysohn angeregt und gemeinsam mit diesem eine Reihe wichtiger topologischer Arbeiten produzierte und den Moskauer Topologen-Kreis gründete. Später schrieb er (in freier Übersetzung): "... sahen wir in den neu entdeckten topologischen Räumen ein faszinierendes Feld für mathematische Untersuchungen und wir entschieden uns, diese Untersuchungen mit der größtmöglichen Gründlichkeit durchzuführen, an dem Ende beginnend, das uns am aussichtsreichsten schien - dem Konzept der Kompaktheit". Die berühmte Arbeit "Mémoire sur les espaces topologiques compacts" von Alexandroff und Urysohn, in welcher der Kompaktheits-Begriff seine endgültige Form erhielt, war 1923 vollendet, wurde aber erst 1929 veröffentlicht. Daß die Begriffs-Bildung gelungen war, wurde später besonders durch den Satz von Tychonoff (193o) und die Ergebnisse von Čech (1937) und M.H. Stone (1937) deutlich. Ein anderes Problem, dem sich Alexandroff und Urysohn zuwandten, und das für viele Jahre herausragende Topologen beschäftigen sollte, war die Frage nach den Beziehungen zwischen metrischen und topologischen Räumen, insbesondere das sog. Metrisations-Problem, d.h. die Frage nach hinreichenden und notwendigen Bedingungen dafür, daß eine Topologie durch eine Metrik induzierbar ist. 1923 charakterisierten sie (in heutiger Terminologie; der Begriff der uniformen Strukturen wurde erst später geschaffen) diejenigen uniformen Strukturen, die durch eine Metrik induzierbar sind, 1929 charakterisierten sie die kompakten Topologien, die durch eine Metrik induzierbar sind, und 1925 charakterisierte Urysohn diejenigen separablen Topologien, die durch eine Metrik induzierbar sind. Eine endgültige Lösung des Metrisationsproblems war ihnen nicht vergönnt. 1924 verunglückte Urysohn, der genialere der beiden, tödlich. Nach einem Besuch Hausdorffs in Hamburg, Hilberts in Göttingen und Brouwers in Holland, hatten die beiden Russen den kleinen Ort Batz an der Südküste der Normandie aufgesucht, um dort ihre Forschungen in Ruhe fortzusetzen. Beim gemeinsamen Baden im Meer wurde Urysohn, der ein hervorragender Sportler und ausgezeichneter Schwimmer war, von einer gewaltigen Welle erfaßt und gegen die Felsen geschleudert. Alexandroff, der von derselben Welle auf den Strand geworfen wurde und nur vorübergehend betäubt war, gelang es nur noch, den Körper seines toten Freundes unter Einsatz des eigenen Lebens zu bergen. Die Lösung des Metrisationsproblems gelang, unabhängig voneinander, 195o dem Japaner Nagata, 1951 dem Russen Smirnov und 1951 dem Amerikaner Bing, nachdem wesentliche Vorarbeiten 194o von dem Amerikaner Tukey durch Schaffung des Begriffs "vollnormal" und Beweis der Implikation metrisierbar $\Rightarrow$ vollnormal, 1944 von dem Franzosen Dieudonné durch Schaffung des Begriffs "parakompakt" und 1948 von dem Briten A.H. Stone durch den Beweis der Äquivalenz vollnormal $\Longleftrightarrow$ parakompakt geleistet worden waren. Die Wichtigkeit des Begriffs parakompakt für die Lösung des Metrisationsproblems wird besonders deutlich durch das Ergebnis von Nagata (195o) und Smirnov (1953), daß ein lokal metrisierbarer topologischer Raum genau dann metrisierbar ist, wenn er parakompakt ist.

Auch in Warschau entstand eine bedeutende Topologen-Schule. Die Gründung der der Mengenlehre und den Grundlagen der Mathematik gewidmeten Zeitschrift Fundamenta Mathematica 192o durch Janiszewski, Mazurkiewicz und Sierpiński bedeutete nicht nur die Inauguration der Polnischen Schule der Mathematik, sondern schuf darüber hinaus ein international bedeutsames Forum, mittels dessen neue Ergebnisse der Mengenlehre, Topologie, Maßtheorie und Funktionalanalysis schnelle Verbreitung fanden, und machte Warschau für lange Zeit zum wichtigsten Zentrum der mengentheoretischen Topologie. Aus der Fülle der Resultate sei nur die Kuratowskische Definition (1922) topologischer Räume in ihrer heutigen Allgemeinheit durch Axiomatisierung des Begriffs "abgeschlossene Hülle" erwähnt. Die Beschreibung topologischer Räume mittels offener Mengen, wie sie in den meisten modernen Lehrbüchern der Topologie zu finden ist, geht auf Tietze (1924) und in ihrer heutigen Form auf Alexandroff (1925) zurück. Andere Definitionsmöglichkeiten, z.B. mittels abgeleiteter Mengen oder mittels abgeschlossener Mengen wurden von Sierpiński (1927) angegeben, einem der produktivsten Mathematiker, der über 7oo Arbeiten in den verschiedensten mathematischen Gebieten veröffentlichte, nach dem eine Straße in Warschau und ein Krater auf dem Mond benannt sind und auf dessen Grabstein die schönen Worte "Erforscher des Unendlichen" stehen.

Es kann und soll hier nicht der Versuch gemacht werden, die rasante Entwicklung der mengentheoretischen Topologie auch nur skizzenhaft darzustellen. Erwähnt seien nur noch die beiden folgenden Entwicklungslinien:

(1) Während im metrischen Räumen die Konvergenz von Folgen zur Beschreibung der topologischen Struktur hinreicht, werden für topologische Räume allgemeinere Konvergenzbegriffe benötigt. Noch heute bei Analytikern beliebt ist die 1922 von E.H. Moore und H.L. Smith entwickelte Konvergenz sog. Moore-Smith-Folgen. Ein erheblich eleganteres und (wegen der Existenz von Ultrafiltern) weitaus brauchbareres Instrumentarium wurde 1937 von Cartan mit den Begriffen "Filter" und "Konvergenz von Filtern" geschaffen.

(2) Während in metrischen Räumen topologische und uniforme Begriffe analysiert werden können, sind für topologische Räume wichtige aus der Analysis stammende uniforme Begriffe wie "vollständig",

"total-beschränkt", "gleichmäßig stetig", "gleichmäßig konvergent" usw. nicht formulier- und somit nicht analysierbar. Unabhängig voneinander schufen A. Weil (1937) und Tukey (194o) den Begriff des uniformen Raumes durch Axiomatisierung der Begriffe "entourage" bzw. "uniforme Überdeckung".

Efremovic schuf 1952 den Begriff des Proximitäts-Raumes durch eine (im Gegensatz zu Riesz's früherem Versuch) erfolgreiche Axiomatisierung des Begriffs der "benachbarten Mengen". Jede Metrik induziert sowohl eine uniforme als eine Proximitäts-Struktur, die beide äquivalent sind (weshalb wir im vorliegenden Buch die Begriffe "entourage" und "uniforme Überdeckung" vermeiden und uns statt dessen auf die Entwicklung der anschaulicheren Begriffe der "benachbarten Mengen und Folgen" beschränken konnten). Neben metrischen topologischen, uniformen und Proximitäts-Räumen entstanden im Laufe der Zeit eine Reihe weiterer abstrakter Raumtypen, mit deren Hilfe jeweils bestimmte topologische Phänomene besonders deutlich in den Griff zu bekommen sind. Diese Zerfaserung topologischer Raumbegriffe erwies sich naturgemäß als unbequem und führte innerhalb der letzten 2o Jahre zu neuen Synthesen. Als besonders erfolgreich erwies sich einersetis der auf Katětovs Arbeit "On continuity structures and spaces of mappings" (1965) basierende Begriff des Nachbarschaftsraumes, der es in einfacher und natürlicher Weise gestattet, topologische,uniforme und Proximitäts-Begriffe simultan zu entwickeln, ohne die am Ende dieses Buches herausgearbeiteten Mängel des Begriffs "metrischer Raum" aufzuweisen (und der in dem geplanten Buch Topologie dargestellt werden soll), andererseits eine in der Sprache der Kategorientheorie entwickelte Theorie topologischer Strukturen, in der die erstaunliche Fülle der bei der Untersuchung der verschiedenartigsten topologischen Raumtypen auftretenden formalen Gemeinsamkeiten systematisch untersucht und "erklärt" wird.